

ROZWIĄZANIA PEWNYCH NIELINIOWYCH
ZAGADNIEŃ DIRICHLETA

Jan BĘCZEK, WSP Olsztyn

W tej pracy badamy istnienie i krotność rozwiązań nieliniowego elip-
tycznego problemu postaci

$$(1) \quad \begin{aligned} \Delta u + \lambda \cdot u - f(u) \cdot u &= g && \text{w } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

Gdzie, Ω jest gładkim i ograniczonym obszarem w $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ i $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłą, parzystą funkcją spełniającą następujące warunki

$$\begin{aligned} c_1 \cdot |t|^\alpha &\leq f(t) \leq c_2 \cdot |t|^{p-1} && \text{dla } |t| > 1 \\ 0 &\leq f(t) \leq c_3 \cdot |t| && \text{dla } |t| \leq 1 \end{aligned}$$

dla pewnych $c_1, c_2, c_3, p, \alpha \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2, c_3, \alpha > 0$ i $p > 1 + \alpha$.

Pokażemy, że dla $\lambda \in \mathbb{R}$, $g \in L_r(\Omega)$ jeśli $N = 2$, $r > 1$, $p > 1 + \alpha$ lub $N \geq 3$, $r \geq \frac{2 \cdot N}{N+2}$, $1 + \alpha < p < \frac{N+2}{N-2}$, powyższy problem ma rozwiązanie.

Zakładając dodatkowo, że $\lambda \leq \lambda_1$ i f jest malejąca dla $t \leq 0$, pokażemy, że ten problem ma dokładnie jedno rozwiązanie.

TWIERDZENIE. *Jeśli $g \in L_r(\Omega)$, gdzie $r > 1$, $N = 2$, $p > 1 + \alpha$ lub $N \geq 3$, $r > \frac{2 \cdot N}{N+2}$, $1 + \alpha < p < \frac{N+2}{N-2}$, wtedy istnieje słabe rozwiązanie problemu (1). Jeśli dodatkowo $\lambda \leq \lambda_1$ i funkcja f jest malejąca dla $t \leq 0$, wtedy problem (1) ma dokładnie jedno słabe rozwiązanie.*

Wykorzystujemy fakt, że ciągle, właściwe i nieparzyste (różnowartościowe) odwzorowanie postaci $I + C$ (gdzie C jest zwarte) jest surjekcją (homeomorfizmem).