

KRZYWIZNY KRZYWYCH W PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ $\mathbb{R}^n$

Andrzej DAWIDOWICZ, ART Olsztyn

Rozdział X książki K. Maurina "Analiza" cz. I (Elementy) zawiera teorię krzywych w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wyłożoną w sposób nader zwięzły i dość abstrakcyjny. Ujęcie takie, chociaż pozbawione intuicyjnego podłoża, owocuje jasnym i pełnym formalizmem matematycznym. Niniejsze opracowanie, rozwijając fragment koncepcji Maurina, podaje stosunkowo proste, efektywne wzory na wszystkie krzywizny krzywej.

Dla wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$ ich iloczyn skalarny będziemy oznaczać nawiasami $\langle x, y \rangle$. Niech $r : \mathbb{R}^1 \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie opisem parametrycznym pewnej krzywej n -krotnie różniczkowalnym. Określimy:

$$G_0(t) := 1,$$

$$G_1(t) := \begin{vmatrix} \langle r'(t), r'(t) \rangle & \langle r'(t), r''(t) \rangle \\ \langle r''(t), r'(t) \rangle & \langle r''(t), r''(t) \rangle \end{vmatrix}$$

(wyznacznik Grama dla wektorów $r'(t), r''(t)$),

...,

$$G_n(t) := \begin{vmatrix} \langle r'(t), r'(t) \rangle & \langle r'(t), r''(t) \rangle & \dots & \langle r'(t), r^{(n)}(t) \rangle \\ \langle r''(t), r'(t) \rangle & \langle r''(t), r''(t) \rangle & \dots & \langle r''(t), r^{(n)}(t) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle r^{(n)}(t), r'(t) \rangle & \langle r^{(n)}(t), r''(t) \rangle & \dots & \langle r^{(n)}(t), r^{(n)}(t) \rangle \end{vmatrix}$$

(analogiczny wyznacznik Grama dla wektorów $r'(t), r''(t), \dots, r^{(n)}(t)$).

Funkcje $G_0, G_1, \dots, G_n$ są nieujemne, ponieważ wyznacznik z macierzy symetrycznej jest nieujemny. Zakładamy dodatkowo, że krzywa nie jest zdegenerowana w każdym $t \in [a, b]$, tzn., wszystkie wyznaczniki Grama są różne od zera. Wówczas krzywizny krzywej wyrażają się wzorami (argument t pomijamy):

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\sqrt{G_0 G_2}}{G_1}, \quad (1)$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\sqrt{G_1 G_3}}{G_2}, \quad (2)$$

$$\dots \dots \dots \quad (3)$$

$$q_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\sqrt{G_{n-2} G_n}}{G_{n-1}}, \quad (n-1)$$

wzory te dodatkowo upraszczają się w pewnych szczególnych przypadkach.

Opracowanie zawiera kilka przykładów typowych zadań rozwiązanych z wykorzystaniem wzorów (1)-(n-1).