

UWAGI DOTYCZĄCE PRACY ABU-MUHANNA, MACGREGOR
Families of Real and Symetric Analytic Functions

Leopold KOCZAN, Politechnika Lubelska

W pracy powyższej autorzy rozwijają klasy funkcji T_k ; T_k i Q_k określone następująco:

$$A_j = \{w : 2(j-1)\frac{\pi}{k} < \arg w < 2j\frac{\pi}{k}\};$$

$$B_j = \{e^{-i\frac{\pi}{k}} w : w \in A_j\} \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, k;$$

$$\Delta = \{z : |z| < 1\};$$

$$T_k = \{f : f_z = z + a_2 z^2 + \dots, z \in \Delta \wedge f(\bar{A}_j \cap \Delta) \subset \bar{A}_j\};$$

$$\tilde{T}_k = \{f : f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, z \in \Delta \wedge f(\bar{b}_j \cap \Delta) \subset \bar{B}_j\};$$

$$Q_k = T_k \cap \tilde{T}_k\}.$$

Autorzy podają wzory strukturalne tych klas, znajdując punkty ekstremalne oraz podają twierdzenia dotyczące n-symetryczności funkcji tych klas.

Autorzy nie badali relacji tych klas do klasy funkcji typowo-rzeczywistych i nie rozważali iloczynów mnogościowych tych klas. Okazuje się, że zachodzi

TWIERDZENIE 1. Dla klas T_k i $\tilde{T}_k$ mamy

1. $T_k \cap T_n = T_{[k;n]},$

2.

$$\tilde{T}_k \cap \tilde{T}_n = \begin{cases} T_{[k;n]} & \text{gdy } [k;n]|k \text{ i } [k;n]|n \text{ nieparzyste} \\ T_{2[k;n]} & \text{gdy jedna z liczb } [k;n]|n, [k;n]|k \text{ jest nieparzysta} \end{cases}$$

3. $T_k \cap \tilde{T}_n = T_{[k;2n]},$

gdzie $[k;n] = \text{NWW liczb naturalnych } k \text{ i } n.$

Powyższe twierdzenie i wzór strukturalny dla klasy Q_k pozwala na wyznaczenie klas funkcji:

$$P^- = \{p(z) = 1 + a_1 z + \dots, \operatorname{Re} p(z) > 0, \quad \operatorname{Im} z \operatorname{Im} p(z) \leq 0 \quad \text{dla } z \in \Delta\},$$

$$P^+ = \{p(z) = 1 + a_1 z + \dots, \operatorname{Re} p(z) > 0, \quad \operatorname{Im} z \operatorname{Im} p(z) \geq 0 \text{ dla } z \in \Delta\}.$$

Mianowicie zachodzi:

TWIERDZENIE 2.

$$P^- = \{(1-z)\sqrt{\frac{g(z)}{z}} : g \in T\}, \quad P^+ = \{(1+z)\sqrt{\frac{h(z)}{z}} : h \in T\},$$

gdzie T jest znaną klasą funkcji typowo-rzeczywistych unormowanych, ($T = T_2$).