

WYMIAR HAUSDORFFA FRAKTALI

Władysław ROMPAŁA, Politechnika Lubelska

Przykłady fraktali to:

$\mathcal{C}$ – zbiór Cantora;

$\mathcal{K}$ – krzywa Kocha;

$\mathcal{S}$ – dywan Sierpińskiego;

$\mathcal{P}$ – poduszka Sierpińskiego

Nowoczesna teoria fraktali powstała na bazie technik komputerowych używanych do symulacji iteracji odwzorowań płaszczyzny zespolonej. Jej twórcą jest B. Mandelbrot. Fraktale – dziwne atraktory – pojawiają się też jako rezultat opisu przebiegu trajektorii punktów dla modeli nieliniowych.

Algorytm do obliczania wymiaru Hausdorffa $\mathbb{D}_H$ określony jest następującym wzorem:

$$L_\epsilon = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} \right)^{\mathbb{D}_H},$$

gdzie L_ϵ – oznacza moc ϵ -porzeczka, ϵ – skala liniowa elementu pokrycia.

Fakt 1. Wymiary Hausdorffa odcinka I , kwadratu $I \times I$ oraz sześcianu I^3 są równe odpowiednio: 1, 2, 3. (występuje zgodność z pojęciem wymiaru intuicyjnie topologicznego)

Fakt 2. Wymiar Hausdorffa

$$\mathbb{D}_H(\mathcal{C}) = \frac{\ln 2}{\ln 3};$$

$$\mathbb{D}_H(\mathcal{K}) = \frac{\ln 4}{\ln 3};$$

$$\mathbb{D}_H(\mathcal{S}) = \frac{\ln 8}{\ln 3};$$

$$\mathbb{D}_H(\mathcal{P}) = \frac{\ln 20}{\ln 3}.$$