

METRYKI W RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA

Mariusz STARTEK, Politechnika Rzeszowska

W rachunku prawdopodobieństwa mamy do czynienia z różnymi rodzajami zbieżności: słaba, według prawdopodobieństwa, prawie pewna itp. Jednym ze sposobów badania zbieżności ciągów zmiennych losowych jest użycie do tego celu metryki, która daną zbieżność metryzuje. Oczywiście, o ile taka metryka jest znana. Jak wiadomo, zbieżność słaba jest metryzowalna przez metrykę Lévy'ego na prostej rzeczywistej

$$L(F, G) = \inf\{h : F(x - h) - h \leq G(x) \leq F(x + h) + h, x \in R\},$$

gdzie F i G są dystrybuantami, oraz przez metrykę Prochorowa w przestrzeni metrycznej ośrodkowej

$$\Pi(P, Q) = \inf\{h : P(A) \leq Q(A^h) + h, Q(A) \leq P(A^h) + h, A \in \mathcal{B}\},$$

gdzie P i Q są miarami probabilistycznymi oraz $A^h = \{x : \text{dist}(x, A) < h\}$. Własności te zachodzą w przypadku klasycznych zmiennych losowych, tzn. takich, że miara całej przestrzeni wynosi 1 oraz zmienne losowe nie przyjmują wartości nieskończonych. Jeżeli dopuścimy takie możliwości, to mówimy, że mamy do czynienia z miarami ułomnymi i zmiennymi losowymi ułomnymi. Dla takich miar i zmiennych losowych odpowiednikami zbieżności klasycznych są tzw. zbieżności ułomne. Pojawia się pytanie o metryzację tych zbieżności. Znana jest metryka Sibleya

$$S(F, G) = \inf\{h : F(x - h) - h \leq G(x) \leq F(x + h) + h,$$

$$G(x - h) - h \leq F(x) \leq G(x + h) + h, x \in (-\frac{1}{h}, \frac{1}{h})\},$$

która metryzuje zbieżność ułomną (będącą odpowiednikiem zbieżności słabej) na prostej rzeczywistej. Okazuje się, że można też zmodyfikować metrykę Prochorowa tak, żeby metryzowała ona zbieżność słabą w przestrzeni metrycznej ośrodkowej. W przypadku, gdy przestrzeń jest liniowa metryka ta ma postać

$$\Pi_S(P, Q) = \inf\{h : P(A) \leq Q(A^h) + h, Q(A) \leq P(A^h) + h, A \in \mathcal{B}, A \in K(\frac{1}{h})\},$$

gdzie $K(r)$ jest kulą o środku w zerze i promieniu $r > 0$.