

O PEWNEJ PODKLASIE FUNKCJI MOCNO GWIAŹDZISTYCH

Anna SZPILA, WSP Rzeszów

Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ klasę funkcji $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, analitycznych w kole jednostkowym $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Niech P oznacza klasę funkcji o części rzeczywistej dodatniej, którą można zapisać w dwojaki sposób

$$P = \{f \in \mathcal{A}, f(0) = 1, \operatorname{Re}(f(z)) > 0 \text{ dla } z \in U\}$$

lub

$$P = \left\{ f : f \prec \frac{1+z}{1-z} \right\},$$

gdzie $\prec$ oznacza podporządkowanie. Mówimy, że dla $0 < \alpha \leq 1$ funkcja $f \in \mathcal{A}$ spełniająca warunki $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ jest mocno gwiaździsta rzędu α jeśli spełnia warunek

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \alpha \frac{\pi}{2} \text{ dla } z \in U.$$

Klasę tę oznaczmy $S^*(\alpha)$. Funkcja $f \in S^*(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $p \in P$ taka, że $\frac{zf'(z)}{f(z)} = [p(z)]^\alpha$, gdzie $z \in U$ i $\alpha \in (0, 1]$, co możemy zapisać inaczej $\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha$, gdzie $z \in U$ i $\alpha \in (0, 1]$.

Wprowadźmy teraz podklasę $S_n^*(\alpha)$ klasy $S^*(\alpha)$ w następujący sposób: $f \in S_n^*(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $p \in P(n)$ taka, że $\frac{zf'(z)}{f(z)} = [p(z)]^\alpha$, gdzie $z \in U$ i $\alpha \in (0, 1]$ lub $\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha$, gdzie $z \in U$ i $\alpha \in (0, 1]$.

W tej klasie prawdziwe są między innymi twierdzenia:

TWIERDZENIE 1. *Funkcja f analityczna w $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ należy do klasy $[S^*(\alpha)](n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $p \in P(n)$ taka, że*

$$f(z) = z \exp \int_0^z \frac{p^\alpha(t) - 1}{t} dt.$$

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli funkcja $f \in [S^*(\alpha)](n)$ i $\alpha \in (0, 1]$, to dla $|z| < r < 1$ mamy*

$$\left(\frac{1-r^n}{1+r^n}\right)^\alpha \leq \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \leq \left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^\alpha$$