

O KLASIE FUNKCJI DANEJ OPERATOREM CAŁKOWYM

Paweł ZAPRAWA, Politechnika Lubelska

Przedmiotem niniejszych rozważań jest funkcjonal całkowy postaci

$$F_\alpha(f)(z) = \int_0^z \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} \right)^\alpha d\zeta.$$

Zauważmy, że funkcjonal ten jest uogólnieniem znanego funkcjonału

$$F(f)(z) = \int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta,$$

będącego operatorem odwrotnym do $G(f)(z) = zf'(z)$. Wiadomo, że jeśli $f \in T$, to $F(f) \in T$, oraz jeśli $f \in T$, to $G(f) \notin T$ (można jedynie wyznaczyć promień największego koła, w którym $G(f)$ jest typowo-rzeczywiste).

Niech

$$T_\alpha = \{F \in H(\Delta) : F(z) = \int_0^z \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} \right)^\alpha d\zeta, f \in T\}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Podstawowym pytaniem jest: dla jakich α klasa T_α jest zawarta w T lub w S_R . Chociaż na powyższe pytania nie udało się uzyskać całościowej odpowiedzi można stwierdzić, że

1. Dla $\alpha \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty) : T_\alpha \not\subset T, T_\alpha \not\subset S_R$.
2. Dla $\alpha \in [-\frac{1}{2}, 1] : T_\alpha \subset T, T_\alpha \subset S_R$.

Otwartym problemem pozostaje przedział $\alpha \in \{1, \frac{3}{2}\}$.

Analizowane są również kwestie wypukłości i gwiazdzistości oraz oszacowania współczynników w klasie T_α .