



O pewnej klasie odwzorowań harmonicznych jednoznacznych w półpłaszczyźnie z nacięciami

Niech $p_0 = p_0(\cdot; \alpha, m, M) : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$, $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $p_0(0) = 1$, $p'_0(0) > 0$, oznacza dane odwzorowanie konforemne koła Δ na obszar $\Omega = \{w : \operatorname{Re} w > m\} \setminus (l \cup \bar{l})$, gdzie $l = \{w : w = M + iv, v \geq \operatorname{Im} p_0(\zeta_0), \zeta_0 \in \partial\Delta\}$, $\bar{l} = \{w : \bar{w} \in l\}$, zaś α, m, M , są stałymi takimi, że $0 < \alpha < \alpha_0 \leq 1/2$, $0 < m < 1 < M$, $\alpha_0 = (1 - m) / (M - m)$.

Zauważmy, że jeśli F, G są pewnymi funkcjami holomorficznymi w obszarze D , to $f = \operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} G$ jest odwzorowaniem harmonicznym zespolonym w D .

Rozważmy rodzinę $\mathcal{F}(p_0)$ odwzorowań harmonicznych f , dla których $F(z) = p_0(z)$ oraz $G(z) = -i \int_0^z p'_0(\zeta) p(\zeta) d\zeta$, $z \in \Delta$, gdzie $p \in \mathcal{P}$ jest dowolną funkcją holomorficzną w Δ taką, że $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $z \in \Delta$, $p(0) = 1$. Stąd jeśli $f \in \mathcal{F}(p_0)$, to $f(0) = 1$, $f'_z(0) > 0$, $f'_{\bar{z}}(0) = 0$.

W wyniku badania własności $\mathcal{F}(p_0)$ oraz punktów ekstremalnych f_η tej klasy, $|\eta| = 1$, otrzymuje się

Twierdzenie. Jeśli $f \in \mathcal{F}(p_0)$, to $f(\Delta) \subset \Omega_1$, gdzie $\Omega_1 = \{w : \operatorname{Re} w > m\} \setminus (l_1 \cup \bar{l}_1)$, $l_1 = \{w : w = M + iv\}$, $\bar{l}_1 = \{w : \bar{w} \in l_1\}$ oraz $v \geq \operatorname{Im} f_{\zeta_0}(\zeta)$ dla $\zeta \in \{e^{it} : 0 < t < \pi\alpha\}$. Ponadto $\Omega \subset \Omega_1$, $\Omega \neq \Omega_1$.

Niech $\mathcal{P}_H(\Delta, \Omega)$ oznacza klasę harmonicznych jednoznacznych i zachowujących orientację odwzorowań koła Δ na $\Omega = p_0(\Delta)$. Przy odpowiedniej normalizacji odwzorowań mamy $\mathcal{P}_H(\Delta, \Omega) \subset \mathcal{F}(p_0)$, jednakże, w topologii zbieżności niemal jednostajnej w Δ , domknięcie $\bar{\mathcal{P}}_H(\Delta, \Omega) \neq \mathcal{F}(p_0)$.

W wyniku badania własności obrazów $f_\eta(\Delta)$ dla punktów ekstremalnych $f_\eta \in \mathcal{F}(p_0)$ domknięcie $\bar{\mathcal{P}}_H(\Delta, \Omega)$ zostało jednoznacznie wyznaczone.