



Krzysztof PIEJKO
Politechnika Rzeszowska

Rzeszów – Lublin – Krynica 10 – 14 Listopada 1999

Pewne obszary kątowe i spłoty funkcji

Niech Δ oznacza koło jednostkowe $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ i niech

$$G(\rho_i, \alpha_i, \beta_i) = \left\{ w \in \mathbb{C} : -\alpha_i < \arg \frac{w - \rho_i}{1 - \rho_i} < \beta_i \right\},$$

gdzie $\rho_i \in \mathbb{C}$, $\rho_i \neq 1$, $\alpha_i \in (0, \pi)$, $\beta_i \in (0, \pi)$, $\alpha_i + \beta_i \leq \pi$, $i = 1, 2$ będą pewnymi obszarami kątowymi płaszczyzny zespolonej. Przez $\mathcal{N}$ rozumiemy będziemy klasę funkcji regularnych w Δ znormalizowanych równaniem $f(0) = 1$.

Dla funkcji

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

z klasy $\mathcal{N}$ zdefiniujemy spłot węglug wzoru

$$(f * g)(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$$

Przy powyższych oznaczeniach jeśli założymy, że

$$f(\Delta) \subset G(\rho_1, \alpha_1, \beta_1) \quad \text{oraz} \quad g(\Delta) \subset G(\rho_2, \alpha_2, \beta_2),$$

to spłot $(f * g)(\Delta) \subset T$, przy czym $T = (\rho_1, \rho_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ jest obszarem zawierającym punkt $\omega = 1$ i ograniczonym fragmentami prostych wyznaczonych przez pary punktów (z_1, z_2) , (z_2, z_3) , (z_3, z_4) , (z_4, z_1) , gdzie $z_1 = a + re^{-2i\alpha_1 + iA}$, $z_2 = a + re^{-2i\alpha_2 + iA}$, $z_3 = a + re^{2i\beta_1 + iA}$, $z_4 = a + re^{2i\beta_2 + iA}$ ponadto $r = |(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)|$, $A = \arg[(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)]$ zaś $a = 1 - re^{iA}$.

Jesli punkty niektórych par pokrywają się, wówczas odpowiednie proste otrzymujemy jako styczne do okręgów o równaniu $|\omega - a| = r$ w danym wspólnym punkcie.

Analogiczne twierdzenie można otrzymać także w przypadku, gdy funkcje f i g posiadają dowolne unormowanie postaci: $f(0) = a$, $g(0) = b$.

Powyższe wyniki stanowią częściowe rozwiązanie ogólnego problemu polegającego na wyznaczeniu obszaru D_3 przy danych D_1 i D_2 w taki sposób, by:

$$f(\Delta) \subset D_1 \wedge g(\Delta) \subset D_2 \Rightarrow (f * g)(\Delta) \subset D_3.$$