Anna SZPILA
WSP Rzeszów

Rzeszów - Lublin - Krynica 10 - 14 Listopada 1999

O pewnych klasach meromorficznych funkcji gwiaździstych

Niech $\mathcal{A}$ oznacza klasę funkcji analitycznych w kole jednostkowym $U := \{z \in C, |z| < 1\}$. Dla ustalonego $n \in N$ zdefiniowana jest klasa $\mathcal{P}(n)$ w następujący sposób

$$\mathcal{P}(n) = \left\{ p \in \mathcal{A},\ p(z) \prec \frac{1+z^n}{1-z^n} \right\}.$$

Przez $\mathcal{M}_k(p)$ oznaczmy klasę funkcji k-listnych meromorficznych w kole jednostkowym U, które mają k różnych biegunów w punktach $z = \sqrt[k]{p^k}$ gdzie $p > 0$ i są unormowane w następujący sposób

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0 \text{ i } \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1. \tag{0.1}$$

Przez $\mathcal{M}_k^*(p, w_0)$ oznaczmy podklasę $\mathcal{M}_k(p)$ taką, że $f \in \mathcal{M}_k^*(p, w_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ρ, $p < \rho < 1$, że spełniony jest warunek

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z) - w_0} \right\} < 0 \text{ dla } \rho < |z| < 1.$$

Dla $f \in \mathcal{M}_k^*(p, w_0)$ istnieje $q \in \mathcal{P}(k)$ taka, że

$$\frac{zf'(z)}{k(f(z) - w_0)} + \frac{p^k}{z^k - p^k} - \frac{p^k z^k}{1 - p^k z^k} = -q(z),\ z \in U. \tag{0.2}$$

Klasę funkcji spełniających (0.2) i unormowanych przez (0.1) oznaczam przez $\Sigma_k^*(p, w_0)$.

Łatwo zauważyć, że

$$\mathcal{M}_k^*(p, w_0) \subset \Sigma_k^*(p, w_0)$$

Jeżeli zaś $p < \sqrt[k]{\sqrt{2} - 1}$, gdzie $\sqrt[k]{\sqrt{2} - 1}$ jest rzeczywistym dodatnim pierwiastkiem, to

$$\mathcal{M}_k^*(p, w_0) = \Sigma_k^*(p, w_0)$$

Dla funkcji $f \in \Sigma_k^*(p, w_0)$ mamy

$$\frac{p^k}{(1+p^k)^2} \le |w_0| \le \frac{p^k}{(1-p^k)^2},$$

oraz $\mathrm{Re}\{w_0\} < 0$. Przy $k \ge 2$ znaleziono także oszacowania współczynników a_{k+1}, a_{k+2}, $\ldots$, a_{2k-1} rozwinięcia funkcji w szereg, oraz zakres zmienności współczynnika a_{2k}.