



Agnieszka WIŚNIEWSKA
Politechnika Rzeszowska

Rzeszów - Lublin - Krynica 10 - 14 Listopada 1999

O funkcjach gwiazdzystych ograniczonych

Niech A oznacza klasę funkcji f analitycznych w kole jednostkowym U i takich, że $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Rozważmy rodzinę $\Omega(\alpha, \beta)$ wypukłych podobszarów prawej półpłaszczyzny, określoną następująco:

$$(1) \quad \Omega(\alpha, \beta) = \{w = u + iv : v^2 < 4\alpha u - (1 - \beta^2)u^2, u > 0\},$$

gdzie $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ i $\beta^2 > 1 - 4\alpha$.

Warunek (1) charakteryzuje obszary symetryczne względem osi rzeczywistej, ograniczone krzywymi stożkowymi o wierzchołku w początku układu współrzędnych. Krzywa $\partial\Omega(\alpha, \beta)$ jest okręgiem dla $\beta = 0$, elipsą - dla $0 < \beta < 1$, parabolą - dla $\beta = 1$, hiperbolą - dla $\beta > 1$. Ponadto, w przypadku, gdy $\alpha = 0$ obszar $\Omega(\alpha, \beta)$ jest ograniczony parą półprostych.

Oznaczmy przez $SC(\alpha, \beta)$ klasę funkcji gwiazdzystych związaną z rodziną $\Omega(\alpha, \beta)$ w następujący sposób: funkcja $f \in A$ należy do klasy $SC(\alpha, \beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p(U) \subset \Omega(\alpha, \beta)$, gdzie $p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$, $z \in U$. Stąd

$$SC(\alpha, \beta) = \left\{ f \in A : \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{2\alpha}{1+\beta} \right| < \beta \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{2\alpha}{1+\beta}, z \in U \right\},$$

gdzie $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ i $\beta^2 > 1 - 4\alpha$.

Przy odpowiednim doborze parametrów otrzymujemy znane podklasy funkcji gwiazdzystych badane m. in. przez W. Janowskiego, J. Stankiewicza oraz niezależnie przez D.A. Brannana i W.E. Kirwana, F. Ronninga.

Celem prezentowanej pracy jest wykazanie, że klasa $SC(\alpha, \beta)$ zawiera tylko funkcje ograniczone tzn. że istnieje stała $M = M(\alpha, \beta)$ taka, że

$$f \in SC(\alpha, \beta) \implies |f(z)| < |z| M, \quad z \in U.$$