

Stanisława Kanas
(Politechnika Rzeszowska)

Wielomiany Czebyszewa a "stożkowe" podklasy klasy Caratheodory'ego

Niech, dla $k \in [0, \infty)$, Ω_k oznacza obszar "stożkowy":

$$\Omega_k = \{u + iv \in \mathbb{C} : u^2 > k^2(u-1)^2 + k^2v^2, u > 0\}.$$

Odwzorowania konforemne $p_k : \mathcal{U} \rightarrow \Omega_k$, $p_k(0) = 1$, $p'_k(0) > 0$ zostały wyznaczone przez Kanas, Wiśniowską w 1999 roku. Postać funkcji p_k , zależna od parametru k , jednolicie może być zapisana następująco: $p_k(z) = 1 + q_k^2(\sqrt{z})$, gdzie

$$q_k(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{1-k^2}} \sinh(A(k) \operatorname{arctanh} z) & \text{dla } k \in [0, 1), \\ \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{arctanh} z & \text{dla } k = 1, \\ \sqrt{\frac{2}{k^2-1}} \sin\left(\frac{\pi}{2\mathcal{K}(s)} \mathcal{F}(u(z)/\sqrt{t}, t)\right) & \text{dla } k > 1 \end{cases} \quad (1)$$

gdzie $A(k) = (2/\pi) \arccos k$, $\mathcal{F}(w, t)$ jest $\mathcal{F}$ -funkcją Jacobiego:

$$\mathcal{F}(w, t) = \int_0^w \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2x^2}}, \quad \mathcal{K}(t) = \mathcal{F}(1, t), \quad \mathcal{K}'(t) = \mathcal{K}(\sqrt{1-t^2}),$$

ponadto $k = \cosh\left(\frac{\pi\mathcal{K}'(t)}{2\mathcal{K}(t)}\right)$ dla $t \in (0, 1)$, oraz $u(z) = (z - \sqrt{t})/(1 - \sqrt{t}z)$.

Każda funkcja q_k jest nieparzysta oraz odwzorowują konforemnie koło jednostkowe na obszar $D_k = \{u + iv : (k-1)u^2 + (k+1)v^2 < 1\}$, oznaczmy $q_k(z) = C(k)g_k(z)$, gdzie $C(k)$ jest odpowiednią stałą zależną od k .

Powstaje pytanie, czy funkcje p_k można zapisać w bardziej jednolity sposób poprzez użycie innej funkcji specjalnej. Okazuje się, że można wyrazić p_k przy użyciu wielomianu Czebyszewa i funkcji Żukowskiego. Niech J będzie funkcją Żukowskiego, natomiast T_n niech oznacza wielomian Czebyszewa stopnia n . Wtedy:

$$p_k(z) = (L \circ T_2 \circ g_k)(\sqrt{z}), \quad (2)$$

gdzie $T_2(w) = 2w^2 - 1$ jest wielomianem Czebyszewa stopnia drugiego, $L(z) = 1 + \frac{C^2(k)}{2}(z+1)$. Z reprezentacji (2) wynikają ciekawe własności funkcji p_k .