

AMALIA PIEŁORZ, MONIKA SKÓRA

(*Politechnika Świętokrzyska*)

Rozwiązania analityczne i numeryczne układu odkształcanego skrętnie

Celem pracy jest wykorzystanie klasycznego równania falowego w analizie analitycznej i numerycznej układu odkształcanego skrętnie, złożonego z wału o długości l i dwu brył sztywnych, ze zmiennym masowym momentem bezwładności.

Wyznaczenie przemieszczeń kątowych $\theta(x, t)$, prędkości i odkształceń przekrojów wału sprowadza się do rozwiązywania równania falowego

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq l$$

z zerowymi warunkami początkowymi oraz z następującymi warunkami brzegowymi

$$M_1(t) - \frac{\partial}{\partial t} [J_1(t) \frac{\partial \theta}{\partial t}] - d_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} + GI_0 (D_w \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x}) = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0,$$

$$J_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + GI_0 (D_w \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x}) + d_2 \frac{\partial \theta}{\partial t} + M_2(t) = 0 \quad \text{dla} \quad x = l,$$

gdzie G jest modułem ścinania, I_0 jest biegunowym momentem pola przekroju poprzecznego, $c^2 = G/\rho$, ρ jest gęstością, J_1 i J_2 są masowymi momentami bezwładności brył sztywnych, d_1 i d_2 są współczynnikami tłumienia zewnętrznego, D_w jest współczynnikiem tłumienia wewnętrznego, momenty $M_1(t)$ i $M_2(t)$ reprezentują obciążenia zewnętrzne.

Rozwiązania równania ruchu wału poszukuje się w postaci rozwiązania falowego typu d'Alemberta $\theta(x, t) = f(t - x) + g(t + x - l)$, gdzie funkcje f i g reprezentują fale przemieszczające się w wale wywołane obciążeniami zewnętrznymi. Po podstawieniu tego rozwiązania do warunków brzegowych otrzymujemy równania różniczkowe zwyczajne z odchylnym argumentem dla funkcji $f(z)$ i $g(z)$. W przypadku $J_1(t) = \text{const}$, równania te mają rozwiązania analityczne, natomiast w pozostałych przypadkach rozwiązania można uzyskać jedynie na drodze numerycznej.

Rozwiązania analityczne, w postaci wzorów rekurencyjnych, zostaną wyprowadzone dla $M_1(t) = H(t)$ i $M_2(t) = 0$, gdzie $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a. Rozwiązania numeryczne zostaną przedstawione dla wybranych przekrojów poprzecznych wału przy zmiennym $J(t)$.