

ANNA ŁAZIŃSKA

Uniwersytet Łódzki

O wybranych warunkach współczynnikowych dla zespolonych funkcji harmoniczych

Niech $\Delta = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$. Rozważmy zespolone funkcje harmoniczne w Δ postaci

$$(1) \quad f = h + \overline{g}, \quad h(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n, \quad g(z) = b_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n z^n, \quad z \in \Delta, \quad |b_1| < 1.$$

Niech V_H oznacza klasę funkcji postaci (1), dla których $b_1 \in [0, 1)$ oraz istnieje $\emptyset \in [0, 2\pi)$, $\phi = \phi(f)$, takie, że $a_n = -|a_n|e^{-1(n-1)\phi}$, $b_n = |b_n|e^{-i(n-1)\phi}$, $n = 2, 3, \dots$

W pracy [JS] autorzy badali pewne warunki gwiazdzistości funkcji klasy V_H . Okazuje się, że główne twierdzenie tej pracy można nieco uogólnić. W referacie przedstawimy m. in.

Twierdzenie 1. *Jeśli funkcja f postaci (1) należy do klasy V_H i spełnia warunek $|g'(z)| < |h'(z)|$, $z \in \Delta$, to*

$$(2) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq 1 - |b_1|.$$

Wiadomo ([AZ], [S], [SS]), że warunek (2) implikuje gwiazdzistość obrazu każdego koła $\Delta = \{z \in \mathbf{C} : |z| < r\}$, $r \in (0, 1)$, przy odwzorowaniu f postaci (1).

Z gwiazdzistością funkcji związane jest także następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Jeśli funkcja f postaci (1) spełnia warunek*

$$(3) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} (n|a_n| + (n+2)|b_n|) \leq 1 - 3|b_1|,$$

to $\left| \frac{f^\bullet(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1$ dla $z \in \Delta \setminus \{0\}$, gdzie $f^\bullet(z) = zh'(z) - \overline{zg'(z)}$, $z \in \Delta$.

Wniosek. *Jeśli funkcja f postaci (1) spełnia warunek (3), to $0 < \frac{\partial}{\partial \theta}(\arg f(re^{i\theta})) < 2$, $r \in (0, 1)$, $\theta \in [0, 2\pi)$.*

Prezentowane zagadnienia stanowią poszerzenie wyników uzyskanych wspólnie z Profesorem Z. J. Jakubowskim i przedstawionych podczas XI Środowiskowej Konferencji Matematyczno-Informatycznej w Chełmie ([JŁ]).

[AZ] Y. Avci, E. Złotkiewicz, *On harmonic univalent mappings*, Ann. UMCS, Sec. A, 44(1), 1990, 1-7.

[JS] J. M. Jahangiri, H. Silverman, *Harmonic univalent functions with varying arguments*, Intern. J. of Applied Math., 8(3), 2002, 267-275.

- [JŁ] Z. J. Jakubowski, A. Łazińska, *O pewnych klasach funkcji harmoniczych z narzuconymi warunkami dla argumentów współczynników*, XI Środowiskowa Konferencja Matematyczno-Informatyczna, Materiały Konf., Rzeszów-Lublin-Chełm, 30.06.-03.07.2005, (2005) 24-25.
- [S] H. Silverman, *Harmonic univalent functions with negative coefficients*, J. of Math. Analysis and Appl., 220, 1998, 283-289.
- [SS] H. Silverman, E. M. Silvia, *Subclasses of harmonic univalent functions*, New Zeland J. of Math., 28, 1999, 275-284.