

Graniczne własności ciągów elementów losowych z losowymi indeksami

Niech (S, d) będzie przestrzenią metryczną, ośrodkową i zupełną z σ -ciałem zbiorów borelowskich $\mathcal{B}$. Niech $\{Y_n, n \geq 1\}$ będzie ciągiem elementów losowych, określonych na pewnej przestrzeni prawdopodobieństwa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i przyjmujących wartości w przestrzeni (S, d) . Niech $\{N_n, n \geq 1\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych, określonych na tej samej przestrzeni prawdopodobieństwa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i przyjmujących wartości ze zbioru liczb naturalnych. Zatem możemy rozpatrywać ciąg $\{Y_{N_n}, n \geq 1\}$, który nazywamy ciągiem elementów losowych z losowymi indeksami lub też losowo wybieranym ciągiem elementów losowych. Tego typu ciągi elementów losowych szczególnie ważną rolę odgrywają w teorii martyngałów, w teorii łańcuchów Markowa, w teorii obsługi masowej, w teorii błędów losowych, w matematyce finansowej, aktuariałnej, w analizie sekwencyjnej i innych dziedzinach naukowych.

Ogólny problem, dotyczący granicznych własności ciągów elementów losowych $\{Y_{N_n}, n \geq 1\}$ można sformułować następująco: przy jakich założeniach ciąg ten jest stabilny, gdy $n \rightarrow \infty$, w tym sensie, że jest on zbieżny do pewnego elementu losowego, powiedzmy Y . Oczywiście możemy tutaj rozpatrywać każdy typ zbieżności, który odgrywa ważną rolę w rachunku prawdopodobieństwa i w statystyce matematycznej, a więc zbieżność według prawdopodobieństwa, z prawdopodobieństwem jeden, według rozkładów, czy też zbieżność w metryce przestrzeni $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $1 \leq p < \infty$. Jako ciągi $\{Y_n, n \geq 1\}$ możemy też rozpatrywać, na przykład, ciągi unormowanych i scentrowanych sum zmiennych losowych. Zatem możemy również formułować i dowodzić słabe i mocne prawa wielkich liczb oraz centralne twierdzenie graniczne dla sum zmiennych losowych z losową liczbą składników.

W referacie przedstawimy szereg twierdzeń granicznych, dotyczących sum zmiennych losowych z losowymi składnikami. Zakładać będziemy, że ciąg indeksów losowych $\{N_n, n \geq 1\}$ jest niezależny od ciągu $\{Y_n, n \geq 1\}$. Dokładniej, rozpatrywać będziemy ciągi zmiennych losowych postaci

$$T_n = \frac{S_n - A_n}{B_n}, \quad n \geq 1, \quad R_n = \frac{S_{N_n} - A_n}{B_n}, \quad n \geq 1, \quad U_n = \frac{A_{N_n} - A_n}{B_n}, \quad n \geq 1,$$

gdzie $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$, i $\{X_n, n \geq 1\}$ jest dowolnym ciągiem zmiennych losowych, a natomiast $\{A_n, n \geq 1\}$ oraz $\{B_n, n \geq 1\}$ są dowolnymi ciągami liczb rzeczywistych takimi, że $0 < B_n < B_{n+1}$, $n \geq 1$, $B_n \rightarrow \infty$, gdy $n \rightarrow \infty$. Interesować nas będzie ciasność (tightness) i słaba zbieżność, głównie ciągu $\{R_n, n \geq 1\}$. Zauważmy, że własności graniczne tego ciągu są w istotny sposób zależne od własności granicznych pozostałych dwóch ciągów.