Janusz Sokół

Politechnika Rzeszowska

O gwiaździstości splotu pewnych funkcji analitycznych

Niech $\mathcal{H}$ oznacza klasę funkcji analitycznych w kole jednostkowym $U = \{z : |z| < 1\}$ na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$. Niech $\mathcal{A}$ oznacza podklasę $\mathcal{H}$ złożoną z funkcji takich, że $f(0) = 0, f'(0) = 1$. Niech

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \ \mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, z \in \ U \right\}, \mathcal{P}_\alpha = \{f \in \mathcal{H} : f(0) = 1, \mathrm{Re}[f(z)] > \alpha, z \in U\}.$$

Splotem albo iloczynem Hadamarda funkcji $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ oraz $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ nazywamy funkcję

$$(f * g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

Problemy dotyczące własności splotu funkcji, a szczególnie jego własności geometryczne były często badane. St. Rusheweyh w [3] przedstawił wiele ciekawych twierdzeń o splotach, które znalazły liczne zastosowania. A. Y. Lashin w [1] podał następujące twierdzenie dotyczące splotu.

Twierdzenie. *Niech $f, g \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta < 1$. Jeśli $f' \in \mathcal{P}_\alpha$, $g' \in \mathcal{P}_\beta$ i $\Phi(z) = (f * g)(z)$, to $\Phi \in \mathcal{S}^*$ o ile*

$$(1-\alpha)(1-\beta) \leqslant \frac{3}{8(\ln -1)^2 + 4} \approx 0.6311.$$

W tej pracy pokazujemy lepsze oszacowanie dla $(1-\alpha)(1-\beta)$ oraz kilka wniosków. W dowodzie wykorzystujemy twierdzenie St. Rusheweyh'a J. Stankiewicza [4] oraz twierdzenie S. Millera i P.T. Mocanu [2] dotyczące podporządkowań różniczkowych.

[1] A. Y. Lashin, *Some convolution properties of analytic functions*, Appl. Math. Lett., 18(2005) 135-138.

[2] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Differential Subordinations*, Marcel Dekker, Inc. 2000.

[3] St. Rusheweyh, *Convolution in Geometric Function Theory*, Les Presses de l'Univ. de Montreal 1982.

[4] St. Ruscheweyh, J. Stankiewicz, *Subordination under convex univalent function*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 33(1985) 499-502.