

KATARZYNA WILCZEK

Politechnika Rzeszowska

Warunek konieczny dla K -quasiokręgu

Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem Jordana, $D^* = \mathbb{C} \setminus D$. Przyjmijmy oznaczenia: przez Γ oznaczamy brzeg obszaru D , $\Gamma = \partial D$, oraz $\Gamma^* = \partial D^*$, przez $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3)$ oznaczamy dowolną trójkę, uporządkowanych zgodnie z orientacją, krzywej punktów $z_k \in \Gamma$, przez $s(\Gamma_{\bar{z}})$ oznaczamy środek harmonicznego trójboku $\Gamma_{\bar{z}}$, tzn. taki punkt, w którym miara harmoniczna trzech łuków wyznaczonych przez punkty z_k wynosi $1/3$.

Definicja 1. Dla ustalonego punktu $a \in D$ definiujemy jednoparametrową rodzinę punktów,

$$S_{\Gamma}^*(a) := \{b \in D^*; b = s(\Gamma_{\bar{z}^t}^*), a = s(\Gamma_{\bar{z}^t})\},$$

z których każdy jest środkiem harmonicznym pewnego trójboku $\Gamma_{\bar{z}^t}^*$, takiego, że $a = s(\Gamma_{\bar{z}^t})$. Zbiór $S_{\Gamma}^*(a)$ nazywamy **harmonicznym obrazem punktu poprzez krzywą Γ** .

Lemat 1. Niech D będzie dowolnym obszarem Jordana wtedy:
(dla dowolnego $a \in D$ mamy $\#S_{\Gamma}^*(a) = 1$) $\iff D$ jest kołem uogólnionym.

Twierdzenie 1. Jeżeli Γ jest K -quasiokręgiem, to dla dowolnego $a \in D$,

$$\text{diam}_{\rho_h} S_{\Gamma}^*(a) \leq C(K),$$

gdzie diam_{ρ_h} oznacza średnicę hiperboliczną obszaru, oraz

$$C(K) = 2 \tanh^{-1} \left(R \left(\frac{1}{2} M_K^2 \right) \right),$$

$$R(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2 - 2 \cos 4\pi\varepsilon}}{\sqrt{5 + 4 \cos 4\pi\varepsilon}},$$

$$M_K = 2\Psi_K(1/6) - 1/3,$$

zaś $\Psi_K(t)$ jest odpowiednio zdefiniowaną funkcją specjalną, patrz np. [1].

Dowód Twierdzenia odwołuje się do teorii K -quasihomografii okręgu jednostkowego oraz odwzorowań zszywających.

Hipoteza 1. Jeżeli Γ jest krzywą Jordana oraz dla dowolnego $a \in D$

$$\text{diam}_{\rho_h} S_{\Gamma}^*(a) \leq M,$$

to Γ jest K -quasiokręgiem dla pewnego $K = K(M)$.

[1] K. Wilczek, *Schwarz Lemma for quasihomographies of a Jordan curve*, Folia Sci. Univ. Technicae Resoviensis, Mat. z. 20, (1996) pp 179-192.